3.4.17 Rozklad na součin IV (kvadratický trojčlen)

Předpoklady: 030416

Př. 1: Rozlož mnohočleny na součin.
a) x^2-100 b) $y^2-8y+16$ c) $x^2+2xy^2+y^4$ d) $25a^2-4$

a) $x^2-100=x^2-10^2=(x+10)(x-10)$

b) $y^2-8y+16=y^2-2\cdot y\cdot 4+4^2=(y-4)^2$

c) $x^2+2xy^2+y^4=x^2+2xy^2+(y^2)^2=(x+y^2)^2$

d) $25a^2-4=(5a)^2-2^2=(5a-2)(5a+2)$

Pedagogická poznámka: Na tabuli postupuji přesně tak, jak je popsáno v učebnici. První rozklad udělám bez jakéhokoliv vysvětlení, poté ho ověřím roznásobením, což už většinou stačí, aby někdo přišel na to, jak jsem objevil čísla do závorek. Všem, kteří postup objeví, zakazuji ho sdělovat ostatním, pouze jim nechávám čas, aby si rozklad stihli provést před tím, než ho napíšu na tabuli a tím si mohli ověřit svou hypotézu. Jakmile jsou si žáci jistí svým postupem, mohou řešit příklad 2 a dál, s ostatními pokračujeme v objevování.

Některé trojčleny, které nejdou rozložit pomocí vzorců, je možné rozkládat z hlavy, stačí se při tom dostatečně moudře tvářit.
Například $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. Jak jsme rozklad našli?

Zkusíme si zpětným násobením ověřit, že jsme trojčlen rozložili správně.
$(x+2)(x+3)=x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$

Zkusíme další. Například $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$.
Roznásobíme opatrněji: $(x+4)\cdot(x+1)=x^2+x\cdot 1+x\cdot 4+4\cdot 1=x^2+5x+4$.

Tak ještě jeden, poslední příklad na ukázku.
$x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$
Roznásobení nejpomaleji:
$(x+4)(x+2)=x^2+2\cdot x+4\cdot x+2\cdot 4=x^2+(2+4)x+2\cdot 4=x^2+6x+8$

Př. 2: Popiš postup, kterým se hledají rozklady v předchozích řešených příkladech.

Napíšeme součin dvou závorek. Obě závorky obsahují *x* a jedno ze dvou čísel, jejichž:
- součet je roven číslu, které je v původním mnohočlenu před *x*,
- součin je roven číslu, které je v původním mnohočlenu bez *x*.

Př. 3: Rozlož mnohočleny na součin.

a) x^2+3x+2 b) $x^2+8x+15$ c) x^2+6x+5

d) $x^2+10x+16$ e) $x^2+9x+20$ f) x^2+5x+3

a) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ Hledáme čísla, jejichž součet je 3 a součin 2.

b) $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$ Hledáme čísla, jejichž součet je 8 a součin 15.

c) $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$ Hledáme čísla, jejichž součet je 6 a součin 5.

d) $x^2+10x+16=(x+8)(x+2)$ Hledáme čísla, jejichž součet je 10 a součin 16.

e) $x^2+9x+20=(x+5)(x+4)$ Hledáme čísla, jejichž součet je 9 a součin 20.

f) x^2+5x+3 Hledáme čísla, jejichž součet je 5 a součin 3. Nemůžeme je nalézt, součin 3 můžeme dostat z celých čísel pouze pro čísla 3 a 1. Součet těchto dvou čísel je však 4 a ne 5 $\Rightarrow$ zdá se, že rozklad mnohočlenu neexistuje.

Z toho, že se nám nepodařilo najít rozklad pomocí dnešního triku, nutně nevyplývá, že mnohočlen nejde rozložit. Kromě celých čísel existují i zlomky či čísla iracionální, s nimiž jde rozložit i některé trojčleny, na kterých bychom si vylámali zuby.

Ne všechny mnohočleny je možné rozložit hledáním dvou čísel.

Dodatek: Klasicky se rozklad trojčlenu řeší nejdříve hledáním dvojice čísel, pokud tento postup selže, nasazuje se podstatně pomalejší postup využívající řešení kvadratické rovnice. Pokud mnohočlen nejde rozložit ani tímto těžším způsobem nejde rozložit vůbec (podobně jako dvojčlen x^2+1).

Př. 4: Při hledání čísel do rozkladu musíme splnit podmínku pro jejich součet i součin. Kterou z těchto podmínek je výhodnější řešit jako první?

Výhodnější je zabývat se nejdříve podmínkou pro součin, protože možností jak získat číslo jako součin dvou celých čísel je podstatně méně než možností, jak získat celé číslo sečtením dvou celých čísel (podmínka pro součet).

Př. 5: Rozlož mnohočleny na součin.

a) x^2-4x+3 b) $x^2-7x+10$ c) $x^2-11x+24$

d) x^2-x-20 e) $x^2+2x-15$ f) x^2-3x+2

g) x^2+3x+2 h) $x^2-8x-20$ i) $x^2+7x-18$

j) x^2+x-30 k) $x^2+7x+12$ l) x^2-2x-3

a) $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$ Hledáme čísla, jejichž součin je 3 a součet –4 $\Rightarrow$ jde o čísla –3 a –1 (součin dvou záporných čísel je číslo kladné).

b) $x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$ c) $x^2-11x+24=(x-8)(x-3)$

d) x^2-x-20 Hledáme čísla, jejich součin je číslo záporné $\Rightarrow$ jedno z čísel bude kladné, druhé záporné (proto může být jejich součet pouze číslo –1) $\Rightarrow$ hledaná čísla jsou čísla –5 a 4.
$x^2-x-20=(x-5)(x+4)$

e) $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$ f) $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

g) $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ h) $x^2-8x-20=(x-10)(x+2)$

i) $x^2+7x-18=(x+9)(x-2)$ j) $x^2+x-30=(x+6)(x-5)$

k) $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$ l) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

Pedagogická poznámka: V bodu a) si někteří žáci znaménka mínus ani nevšimnou. Pak je třeba je zastavit a upozornit, že řešení nemají dobře. S žáky, kteří mají pocit, že záporná čísla se nesmí používat (protože v předchozím příkladu ani v příkladech z počátku hodiny se nevyskytovala), velmi rychle projdeme začátek hodiny a ujistíme se, že není žádný rozumný důvod záporná čísla zavrhovat.

Př. 6: Jaké mnohočleny je možné rozložit postupem používaným v předchozích dvou příkladech? Jaké mnohočleny tímto způsobem rozkládat nemůžeme?

Rozklad zapisujeme do dvou závorek, které obsahují x $\Rightarrow$ jejichž vynásobením můžeme získat pouze x^2 nenásobenou dalším číslem $\Rightarrow$ rozkládat můžeme pouze trojčleny, které mají kvadratický koeficient (číslo před x^2) roven jedné (kdybychom do jedné ze závorek připsali k x další číslo, pravidla pro hledání čísel do závorek by přestala platit).

Př. 7: Rozlož mnohočleny na součin.
a) $7x^3-14x^2$ b) $2a^2b-8ab^2$ c) $2x^4-3x^3+2x^2-3x$

a) $7x^3-14x^2=7x^2(x-2)$

b) $2a^2b-8ab^2=2ab(a-b)$

c) $2x^4-3x^3+2x^2-3x=x(2x^3-3x^2+2x-3)=x[x^2(2x-3)+(2x-3)]=x(2x-3)(x^2+1)$

Př. 8: Rozlož mnohočleny na součin (Rada: Některé body vyžadují kombinaci více postupů).
a) x^3-x^2-6x b) $(a+b)^2-c^2$ c) $x^2-2xy+y^2-z^2$
d) $2a^2+5a+2$ e) $6y^2+7y+2$ f) $6x^2+x-1$

a) $x^3-x^2-6x=x(x^2-x-6)=x(x-3)(x+2)$

b) $(a+b)^2-c^2=[(a+b)+c][(a+b)-c]=(a+b+c)(a+b-c)$

c) $x^2-2xy+y^2-z^2=(x-y)^2-z^2=[(x-y)+z][(x-y)-z]=(x-y+z)(x-y-z)$

d) $2a^2+5a+2=2a^2+a+4a+2=a(2a+1)+2(2a+1)=(2a+1)(a+2)$

e) $6y^2+7y+2=6y^2+3y+4y+2=3y(2y+1)+2(2y+1)=(2y+1)(3y+2)$

f) $6x^2+x-1=6x^2+3x-2x-1=3x(2x+1)-(2x+1)=(2x+1)(3x-1)$

Shrnutí: Některé trojčleny můžeme rozkládat na součin hledáním dvojice čísel.